古今算法記遺題の数値解について (Computer Algebra : Design of Algorithms, Implementations and Applications)

AUTHOR(S):

荒井, 千里; 森継, 修一

数理解析研究所講究録
第 1568 巻 2007 年 87-93

古今算法記遺題の数値解について

荒井 千里
CHISATO ARAI
筑波大学 図書館情報メディア研究科
GRADUATE SCHOOL OF LIBRARY, INFORMATION AND MEDIA STUDIES, UNIVERSITY OF TSUKUBA*

森継 修一
SHUICHI MORITSUGU
筑波大学 図書館情報メディア研究科
GRADUATE SCHOOL OF LIBRARY, INFORMATION AND MEDIA STUDIES, UNIVERSITY OF TSUKUBA†

1 はじめに

和算には多くの初等幾何の問題が含まれている。和算家達は、辺の長さや面積、体積へ甲乙丙等の変数を与えそれらの関係から多項式方程式を導き、最終的な答えとして変数の数値を求めるという手順で初等幾何の問題を代数方程式の問題へ変換を行った。

1671 年に澤口一之が書いた「古今算法記」には、解答のない問題 15 問が出されている。これに解答を与えたのが、関孝和の「発微算法」(1674 年) であった。澤口のこの問題は、次数の高い 1 変数方程式に帰着される特徴があり、最高次のものは第 14 問から導かれる 1458 次方程式である。関は発微算法で、辺の長さや面積、体積などから導かれた連立代数方程式系を解いているが、最終的な答えとして数値ではなく、主変数の 1 変数多項式を示しその解を求めればよい、という形で終わっている。以来、現在まで全問を通じて数値解まで追求した研究は見あたらない。(但し、第 14 問については木村 [2] で示されている。) 本研究では全問の数値解を示すと同時に、澤口が本文中でパラメータに与えた値について考察する。

2 古今算法記遺題で使われている公式・計算手法

2.1 六斜術

第 12 問、13 問、14 問は六斜術という関係式が基礎になっている。この関係式は江戸時代に様々な人の手で確立されたため式の形は一通りではないが、ここでは平山 [1] によるものを示す。

図 1 のように、三角形の平面上に一点をとり、その点と 3 頂点を結ぶ。もとの三角形の 3 辺を a, b, c、結んだ線分を d, e, f とすると次の関係式が得られる。

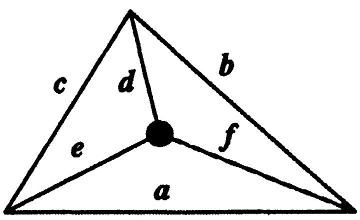

図 1: 六斜術

*arai@slis.tsukuba.ac.jp
†moritsug@slis.tsukuba.ac.jp

$$
\begin{aligned}
a^2d^2(b^2+c^2+e^2+f^2)-a^2d^4-a^4d^2 & \\
+b^2e^2(a^2+c^2+d^2+f^2)-b^2e^4-b^4e^2 & \\
+c^2f^2(a^2+b^2+e^2+d^2)-c^2f^4-c^4f^2 & \\
-a^2b^2c^2-a^2e^2f^2-b^2f^2d^2-c^2d^2e^2 &= 0
\end{aligned}
$$

これを六斜術といい、和算の基礎公式となった。近代の数学で考えると、四面体の 6 辺でその体積を書き表し、四面体をつぶして体積を 0 と置いた場合がこの六斜術に相当し、点を三角形の外側にとった場合でも成立する。

2.2 三乗化

三乗化とは、$x+y+z=0$ から $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$ が導かれることを利用して式変形を行う手法である。$f(x)=A+Bx+Cx^2, g(x)=x^3-D$ が与えられているとき、$f(x)$ から $A^3+B^3x^3+C^3x^6=3ABCx^3$ を導く。これを $g(x)$ で簡約すると $A^3+B^3D+C^3D^2=3ABCD$ となり x が消去できる。古今算法記遺題の第 3 問、4 問、12 問、13 問、14 問にはこの手法が使われている。この用語は小川 [4] によるもので、竹之内 [6] では、この手法は当時の発見であり三乗化を用いて問題を作ることが古今算法記遺題の意図の 1 つであったと述べられている。したがって、問題の多くに三乗、三乗根を使った必然性のない条件が課されている。この結果は、変数 x に関する $f(x), g(x)$ の終結式 $\mathrm{Res}(g(x), f(x), x)=A^3+B^3D+C^3D^2-3ABCD$ を求めたことに相当する。

3 数式処理による古今算法記遺題の解法の手順

古今算法記遺題の解を、計算機で求める手順について述べる。本研究では、数値解を求めることを目的としているため、次の手順を用いて 1 変数多項式を導き数値解を求める。

(Step 1) 辺の長さ、面積、体積等に変数を与え、そのうちの 1 つを主変数とする。古今算法記では主変数は「天元」、直角三角形のそれぞれの辺は「鈎股弦」という名称が与えられている。なお、当時から三平方の定理は知られていた。

(Step 2) 各変数の関係から得られる条件を多項式方程式 $f_1,\ldots,f_\ell$ に変換する。このとき、u_i は定数で、これは遺題中であらかじめ与えられた値であり、x_j は未知数とする。

$$
\begin{cases}
f_1(x_1,\ldots,x_n) = u_1 \\
\quad\vdots \\
f_\ell(x_1,\ldots,x_n) = u_\ell
\end{cases}
$$

(Step 3) 連立代数方程式から Gröbner 基底を計算して主変数（天元）の 1 変数多項式を求める。

(Step 4) 1 変数多項式から、主変数についての数値解を求める。この値から、順次、他の変数の数値解も求める。この際、数値解として負の値が得られた場合やその値では図形として不適な場合等は、問題に対する解の組としては不適として除外する。

計算例として第 4 問を取り上げる。

例 1 (古今算法記遺題　第 4 問)

三つの立方体がある。只云う。甲積＋乙積＝寸立積 137340 坪。又云う。乙積＋丙積＝寸立積 121750 坪。別云う。$\sqrt{\text{甲方面寸}}+\sqrt[3]{\text{乙方面寸}}+\sqrt[4]{\text{丙方面寸}}=$ 1 尺 2 寸。甲、乙、丙の方面は、それぞれいくらか。

(Step 1) 辺の長さに変数を与える。

甲方面寸: x, 乙方面寸: y, 丙方面寸: z, $\sqrt{x}$: a, $\sqrt[3]{y}$: b, $\sqrt[4]{z}$: c

(Step 2) 各変数の関係から得られる条件を多項式方程式に変換する。

甲積+乙積 $\Rightarrow f_1 = (a^2)^3 + (b^3)^3 - 137340$
乙積+丙積 $\Rightarrow f_2 = (b^3)^3 + (c^4)^3 - 121750$
$\sqrt{\text{甲方面寸}} + \sqrt[3]{\text{乙方面寸}} + \sqrt[4]{\text{丙方面寸}} \Rightarrow f_3 = a + b + c - 12$

(Step 3) 連立代数方程式から主変数（天元）c の 1 変数多項式を求める。

$I = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle \subset \mathbf{Q}[a, b, c]$ として、1 変数多項式を求めるために、
I の辞書式順序 $(a \succ b \succ c)$ の Gröbner 基底 Gr を計算する。

$$Gr = \{c^{108} - 9c^{102} + 648c^{101} - \ldots, \quad \ldots, \quad \ldots 24014242432\}$$

(Step 4) 主変数 c の 108 式が得られ、これより数値解を求める。

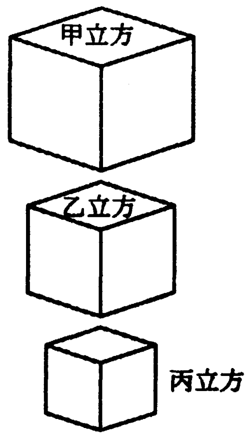

図 2: 第 4 問

4 計算結果

古今算法記遺題 15 題中、連立代数方程式で表現されない 1 題（第 15 問）を除いた 14 題を対象とする。Gröbner 基底の計算には Maple10[3]、Risa/Asir[5] の 2 種の数式処理システムを使用し、単項式順序は、主変数を最低順序とした辞書式順序、係数体は $\mathbf{Q}$ で計算した。

表 1: 条件の式・数値解

問題番号	変数	
主変数: 次数	条件の式	数値解
第一問	大円径 $= x$, 中円径 $= y$, 小円径 $= z$	
	$f_1 = y - z - 5$	大円径=20.647992927297843729
	$f_2 = \frac{\pi}{4}(x^2 - y^2 - 2z^2) - 120$	中円径=12.586876796801000877
z: 6 次	$f_3 = z(x+y)^2 - 4xy(x-y)$	小円径=7.5868767968010008772
第二問	平方面寸 $= x$, 立方面寸 $= y$, $a = x^{1/3}$, $b = y^{1/2}$	
	$f_1 = a^2 + b^3 - 10$	平方面寸=3.0316208061421098195
b: 9 次	$f_2 = a^3 + b^2 - 7$	立方面寸=3.9683791938578901805
第三問	甲方面 $= x$, 乙方面 $= y$, 丙方面 $= z$, 丁方面 $= w$	
	$a = x^{1/3}$, $b = y^{1/3}$, $c = z^{1/3}$, $d = w^{1/3}$	
	$f_1 = a^3 - b^3 - 3$	甲方面寸=2611.1308741444867849
	$f_2 = b^3 - c^3 - 7$	乙方面寸=2608.1308741444867849
	$f_3 = c^3 - d^3 - 23$	丙方面寸=2601.1308741444867849
d: 27 次	$f_4 = a + b + c + d - 55$	丁方面寸=2578.1308741444867849
第四問	甲方面 $= x$, 乙方面 $= y$, 丙方面 $= z$, $a = x^{1/2}$, $b = y^{1/3}$, $c = z^{1/4}$	
	$f_1 = (a^2)^3 + (b^3)^3 - 137340$	甲方面寸=36.864146537785304128
	$f_2 = (b^3)^3 + (c^4)^3 - 121750$	乙方面寸=44.351676187667457304
	$f_3 = a + b + c - 12$	丙方面寸=32.556382116381103129
		甲方面寸=51.457036318368727728
		乙方面寸=10.293599457590667316
c: 108 次		丙方面寸=49.414409630840339604

第五問	甲 $= x_1$, 乙 $= x_2$, 丙 $= x_3$, 丁 $= x_4$, 戊 $= x$, 各方面差 $= y$	
	$f_1 = x_1^3 + x_2^3 - 700$	甲方面寸=7.3488063502149911295
	$f_2 = x_3^3 + x_4^3 + x^3 - 500$	乙方面寸=6.7175159515506248173
	$f_3 = x + y - x_4$	丙方面寸=6.0862255528862585051
	$f_4 = x + 2y - x_3$	丁方面寸=5.4549351542218921929
	$f_5 = x + 3y - x_2$	戊方面寸=4.8236447555575258807
x: 9 次	$f_6 = x + 4y - x_1$	各方面差=0.6312903986643663122
第六問	鉤 $= x$, 股 $= y$, 弦 $= z$	
	$f_1 = x^3 + z^3 - 700$	鉤=4.8630938669856517869
	$f_2 = y^3 + z^3 - 900$	股=6.8041686038280444438
x: 18 次	$f_3 = x^2 + y^2 - z^2$	弦=8.3633959818026516719
第七問	鉤 $= x$, 股 $= y$, 弦 $= z$, 中鉤 $= w$, $a = x^{1/3}$, $b = y^{1/3}$, $c = z^{1/2}$, $d = w^{1/4}$	
	$f_1 = c + b - 20$	鉤=22.536579078161965178
	$f_2 = a + d - 5$	股=199.22232575843128542
	$f_3 = a^6 + b^6 - c^4$	弦=200.49297363534903005
a: 36 次	$f_4 = a^3b^3 - c^2d^4$	中鉤=22.393750849125181994
第八問	鉤 $= x$, 股 $= y$, 弦 $= z$, $a = (x + y + z)^{1/3}$	
	$f_1 = a + \frac{1}{2}xy - 500$	鉤=23.230828426448616773
	$f_2 = x^3 + y^3 - 90000$	股=42.628306428718071361
	$f_3 = x + y + z - a^3$	弦=48.547336676276893026
a: 18 次	$f_4 = x^2 + y^2 - z^2$	※ 鉤、股を入れ替えた形の 2 組の解を持つ
第九問	鉤 $= x$, 股 $= y$, 弦 $= z$, 円径 $= w$	
	$f_1 = \frac{1}{2}xy - \frac{1}{4}\pi w^2 - 150$	鉤=9.0375586235506631299
	$f_2 = x^3 + y^3 - 90000$	股=44.691191873360720132
	$f_3 = x + y - z - w$	弦=45.595834205940987807
	$f_4 = x^2 + y^2 - z^2$	円径=8.1329162909703954549
w: 6 次	$f_4 = x^2 + y^2 - z^2$	※ 鉤、股を入れ替えた形の 2 組の解を持つ
第十問	鉤 $= x$, 股 $= y$, 弦 $= z$, 中鉤 $= w$, 方面 $= v$, (長弦 $= u$ は補助的に導入)	
	$f_1 = \frac{xy}{2} - v^2 - 350$	鉤=36.504859379264541154
	$f_2 = \frac{5}{7}y + \frac{2}{3}w - 45$	股=38.328301546546903986
	$f_3 = x^2 + y^2 - z^2$	弦=52.930742085700141191
	$f_4 = (y - v)^2 + v^2 - u^2$	中鉤=26.433962628699745729
	$f_5 = (x - v)^2 + v^2 - (z - u)^2$	方面寸=18.697182384021694702
	$f_6 = xy - wz$	
y: 10 次	$f_7 = v^2 - (x - v)(y - v)$	
第十一問	鉤 $= x$, 股 $= y$, 弦 $= z$, 円径 $= r$, (方面寸 $= s$, 中鉤 $= w$ は補助的に導入) 中鉤で分けられた弦のうち円の側 $= v$	
	$f_1 = r - s - 165/10$	鉤=31.380339940668518994
	$f_2 = z - y - 55/10$	股=86.770521344719628199
	$f_3 = x^2 + y^2 - z^2$	弦=92.270521344719628199
	$f_4 = x(w - s) - sy$	円径=24.337681813248903377
	$f_5 = v + w - y - r$	

 y: 10 次	$f_6 = (z-v)^2 + w^2 - x^2$ $f_7 = v^2 + w^2 - y^2$	
第十二問	大斜 $= x$, 中斜 $= y$, 小斜 $= z$	
	$f_1 = \frac{-2093809}{1000000}x^4 + ((-z^2 + \frac{18093809}{1000000})y^2$ $-16y^4 + \frac{38093809}{1000000}z^2 - \frac{471505968128481}{1000000000000})x^2$ $+(52z^2 + \frac{13906191}{50000})y^2 - 36z^4 - \frac{33906191}{50000}z^2$	大斜=8.000062482377946352З 中斜=6.999918388774620574З 小斜=4.9998400387456928662
  x: 54 次	$f_2 = x^3 + z^3 - 637$ $f_3 = x^3 + y^3 - 855$	大斜=8.5104874260733040651 中斜=6.2023494789587359352 小斜=2.7412524066380665512
第十三問	大斜 $= x$, 中斜 $= y$, 小斜 $= z$, (c, d は補助的に導入した線分の長さ)	
    x: 72 次	$f_1 = x^3 + z^3 - 3817$ $f_2 = y^3 + x^3 - 5572$ $f_3 = (12-c)^2 + 12^2 - x^2$ $f_4 = c^2 + d^2 - z^2$ $f_5 = (12-d)^2 + 12^2 - y^2$	大斜=15.000255860664998387 中斜=12.999659342365642892 小斜=7.6164193209439103114
第十四問	甲斜 $= x$, 乙斜 $= y$, 丙斜 $= z$, 丁斜 $= u$, 戊斜 $= v$, 巳斜 $= w$	
        x: 1458 次	$f_1 = x^3 - y^3 - 271$ $f_2 = y^3 - z^3 - 217$ $f_3 = z^3 - u^3 - 608/10$ $f_4 = u^3 - v^3 - 3262/10$ $f_5 = v^3 - w^3 - 61$ $f_6 = u^2x^4 + ((-u^2 - v^2 + w^2)y^2 + (-u^2 + v^2 - w^2)z^2$ $+u^4 + (-v^2 - w^2)u^2)x^2 + v^2y^4$ $+((u^2 - v^2 - w^2)z^2 - v^2u^2 + v^4 - w^2v^2)y^2 + w^2z^4$ $+(-w^2u^2 - w^2v^2 + w^4)z^2 + w^2v^2u^2$	甲斜=10.000005717 乙斜=9.000007058 丙斜=8.000008932 丁斜=7.669909635 戊斜=5.000022867 巳斜=4.000035729 ※ 精度 10 桁で計算

5 数値解の計算に付随して得られた結果

5.1 古今算法記遺題 第 4 問

計算の結果、得られる解は 2 通りある。

	解 No.1	解 No.2
甲方面寸	36.864146537785304128	51.457036318368727728
乙方面寸	44.351676187667457304	10.293599457590667316
丙方面寸	32.556382116381103129	49.414409630840339604

文中で与えられている図 (図 2) から、変数間の大小関係が 甲方面寸 > 乙方面寸 > 丙方面寸 となることを想定しているように読みとれるが、数値解は No.1: 乙方面寸 > 甲方面寸 > 丙方面寸, No.2: 甲方面寸 > 丙方面寸 > 乙方面寸 となり、いずれも大小関係を満たしていない。この結果を実際に確かめるためには 108 次の方程式を具体的に解く必要があるが、当時、それは不可能であり、遺題に解答を与えた関らもこの大小関係は確認できていないと考える。したがって、この結果は澤口、関の想定外と考えられる。

[注]　$i+j+k=12$ かつ $i^2>j^3>k^4$ となる正整数 (i,j,k) は $(7,3,2),(8,3,1),(9,2,1)$ の 3 組しか存在しないことが探索により確認できる。これらのうち $(7,3,2)$ を用いて、甲方面寸=49, 乙方面寸=27, 丙方面寸=16 と仮定して、原文に近い数値を持つ関係式を探してみると

$$\left\{\begin{array}{lcl} \text{甲積}+\text{乙積} & = & 1373\underline{32} \\ \underline{\text{甲積}}+\text{丙積} & = & 1217\underline{45} \qquad \text{(下線部のみ原文と異なる)} \end{array}\right.$$

という形が見つかる。現時点では全く推測でしかないが、澤口が {甲方面寸=49, 乙方面寸=27, 丙方面寸=16} を想定して作題した可能性はあると考えられる。なお、上記の関係式を用いても、$(49,27,16)$ 以外に $(34.236, 45.979, 43.377)$ という別解が存在する。

5.2　古今算法記遺題　第 12 問

三角形の中に 3 本の斜めの線が入っている。
甲斜 6 寸、乙斜 4 寸、丙斜 1 寸 4 分 47。
只云う。大斜^3 + 小斜^3 は寸立積 637 坪。
別云う。中斜^3 + 大斜^3 は寸立積 855 坪。
このとき、大斜、中斜、小斜を求めよ。

変数 大斜（天元）$=x$,　中斜 $=y$,　小斜 $=z$

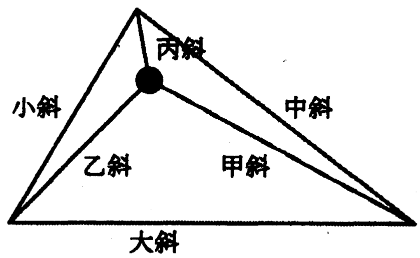

図 3:　第 12 問

5.2.1　澤口一之が想定したと考えられる解の組

澤口は、大斜 $=8$, 中斜 $=7$, 小斜 $=5$ を想定したと考えられる。理由として、以下があげられる。

- これらの値の下で、只云数 $637=8^3+5^3$、別云数 $855=7^3+8^3$ の関係を満たす。
- これらの値に加え、与えられている値 甲斜 $=6$、乙斜 $=4$ を六斜術の式へ代入すると $1.44714728107\ldots$ が得られる。丙斜 $=1.447$ はこの近似値と考えられる。
- 実際に得られる 大斜, 中斜, 小斜 の数値解は次となり、数値を基に作図した図形（図 3）は問題で与えられている図に近い。

$$\begin{array}{lcl} \text{大斜} & = & 8.0000624823779463523 \\ \text{中斜} & = & 6.9999183887746205743 \\ \text{小斜} & = & 4.9998400387456928662 \end{array}$$

5.2.2　澤口一之が想定していないと考えられる解の組

第 12 問には次の別解が存在する。

$$\begin{array}{lcl} \text{大斜} & = & 8.5104874260733040651 \\ \text{中斜} & = & 6.2023494789587359352 \\ \text{小斜} & = & 2.7412524066380665512 \end{array}$$

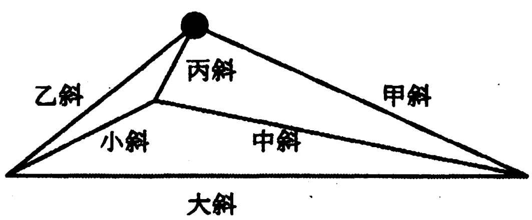

図 4:　第 12 問 想定外の解

問題にこの解に相当する図形は与えられておらず、この存在についての注記等もない。したがって、これは澤口の想定外と考えられる。ただし、点が三角形の外側にあっても六斜術は成立するため、この形の解の組が得られることは自然である。

6 結論・今後の課題

- 古今算法記遺題の第1問〜第14問の数値解を求めた。本計算環境では、Gröbner 基底を用いて第1問〜第13問の1変数多項式を導くことは可能だったが、第14問の1458次の1変数多項式を計算することは不可能だった。この1458次式は、三乗化を用いた関の方法を改良した算法で計算すると最も短時間で求めることができた。

- 求めた数値解を考察した結果、澤口一之らの想定外といえる結果が見つかった。
  - 第4問
    問題中の図では変数間の大小関係が 甲方面寸 > 乙方面寸 > 丙方面寸 になっているため、澤口はこの大小関係を想定して遺題を提出したと考えられる。しかし、得られた2組の数値解はいずれもこの関係を満たさない。これは澤口、関の想定外と考えられる。

    作題時の澤口の意図として、図における大小関係を満たす整数解 $(49, 27, 16)$ を想定していたと仮定するならば、問題文の表記が誤っている可能性も考えられる。
  - 第12問
    答えとなる数値解は2組得られる。数値解の値、問題中の図等から、澤口は一方の整数解を想定して問題を作成したと考えられる。他方の解の存在については澤口の古今算法記、関の発微算法等で言及はされていない。この解が存在することは澤口らの想定外と考えられる。

- 整数解を想定して澤口が作題したが、実際には整数解に近い値が得られない問題が、上記第4問以外に存在する可能性がある。今後の課題として、問題で与えられている定数、数値解等の再点検を行いたい。

参考文献

[1] 平山諦. 関孝和:その業績と伝記. 恒星社厚生閣, 東京, 1974.

[2] 木村欣司, 平野照比古, 横山和弘. 関孝和の問題を解く. J.JSSAC（日本数式処理学会誌）, Vol. 11, No. 3,4, pp. 35–42, 2005.

[3] Maplesoft. Maple 10 User Manual（日本語版）. Maplesoft, 東京, 2005.

[4] 小川東. 関孝和「発微算法」:現代語訳と解説. 大空社, 東京, 1994.

[5] 齋藤友克, 竹島卓, 平野照比古. グレブナー基底の計算　実践篇　Risa/Asir で解く. 東京大学出版社, 東京, 2003.

[6] 竹之内脩. 古今算法記自問一十五好之答術. 近畿和算ゼミナール報告集 6, 2002.